EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Programmiersprachen und Softwaretechnik

Prof. Klaus Ostermann

Leitung des Seminars
David Binder
Ingo Skupin

Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 3 – SS18

Tübingen, 4. Mai 2018

Aufgabe 1: Lektüre

Für kommende Woche lesen Sie bitte Kapitel 8 und 9 und schicken Ihre Fragen bis Dienstag Abend (also Dienstag, der 15.Mai) an uns.

Aufgabe 2: Eindeutigkeit

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, A und B Objekte in dieser Kategorie und P und Q seien beide jeweils Produkte von A und B mit Projektionen $p_1 : P \to A$ und $p_2 : P \to B$ beziehungsweise $q_1 : Q \to A$ und $q_2 : Q \to B$.

Zeigen Sie, dass P und Q isomorph sind.

Hinweis: Der Beweis funktioniert analog zum Beweis für die Isomorphie von initialen Objekten (vgl. 5.4 im Buch) und verwendet nur die universelle Eigenschaft der beiden Produkte.

Bonus: Wie verhält es sich bei zwei Coprodukten?

Aufgabe 3: Produkte in Haskell

Laden Sie sich den Code für dieses Aufgabenblatt auf der Website der Veranstaltung herunter. Darin sollen Sie zeigen, dass

1. `data Pair a b = MkPair b a` ein Produkt von `a` und `b` und
2. `Integer` ein Produkt von `Integer` mit sich selbst sind.

Aufgabe 4: Funktoren

Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Dann nennen wir $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ die *Produktkategorie* von $\mathcal{C}$ mit sich selbst. Die Objekte in dieser Kategorie sind Paare (A, B) von Objekten A und B aus $\mathcal{C}$. Die Morphismen zwischen Objekten (A, B) und (A', B') sind Paare (f, g) von Morphismen $f : A \to A'$ und $g : B \to B'$ aus $\mathcal{C}$.

Für Morphismen $f : C \to A$ und $f : C \to B$, notieren wir den universellen Morphismus $h : C \to A \times B$ des Produkts $A \times B$ mit $\langle f, g \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "\langle f\, g\rangle = h"] & \\
A & & B \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann definieren wir $f \times g \colon A \times B \to A' \times B'$ für $f \colon A \to A'$ und $g \colon B \to B'$ als $f \times g = \langle f \circ \pi_1, g \circ \pi_2 \rangle$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "f \times g"] & B \arrow[d, "g"] \\
A' & A' \times B' \arrow[l, "\pi_1'"] \arrow[r, "\pi_2'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass $\times \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ mit $\times(A, B) \coloneqq A \times B$ auf Objekten und $\times(f, g) \coloneqq f \times g$ ein Bifunktor (also ein Funktor von $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$) ist.

Hinweis: In beiden Fällen müssen Sie die Eindeutigkeit der Morphismen der universellen Eigenschaft des Produkts verwenden. Es hilft meistens, sich die Situation anhand eines Diagramms zu verdeutlichen.